UNA GENERALIZZAZIONE DELLA FORMULA DI BLACK E SCHOLES ALLE OPZIONI CON BARRIERA E PARAMETRI DIPENDENTI DAL TEMPO

Francesco Zirilli
Dipartimento di Matematica G. Castelnuovo
Università di Roma "La Sapienza"
00185 Roma, Italia

Cominciamo la nostra esposizione introducendo il modello di Black Scholes per le opzioni europee.

Il modello di Black Scholes è un modello matematico che permette di risolvere un problema di "option pricing".

Il problema dell'option pricing è uno dei problemi di una nuova disciplina nota come "financial engineering".

Referenze:

F. Black, M. Scholes: "The pricing of options and corporate liabilities"
J. of Political Economy 81, (1973), 637-659.

P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison: "Option pricing"
Oxford Financial Press, 1993.

Presenteremo:

Per il problema di Black Scholes

1) Il problema applicativo,
2) Il modello matematico,
3) La risoluzione quantitativa del modello.

Per il problema delle opzioni con barriera e parametri dipendenti dal tempo:

1) Il problema applicativo,
2) Il modello matematico,
3) La risoluzione quantitativa del modello.

Il problema di Black Scholes

1) *Il problema applicativo*

I contratti detti opzioni sono giornalmente scambiati sui mercati finanziari e nelle borse merci.

Le opzioni sono prodotti derivati ("derivative") dipendono cioè da una o più attività sottostanti.

I contratti di opzione sono suddivisi in due tipi fondamentali: *calls* e *puts*. Una "*call option*" dà al possessore il diritto di *acquistare* una determinata attività entro una certa data per un prezzo stabilito. Una "*put option*" dà al possessore il diritto di *vendere* una determinata attività entro una certa data per un prezzo stabilito. Il prezzo indicato nel contratto, cioè il prezzo a cui si potrà acquistare (nel caso di un'opzione *call*) o vendere (nel caso della *put*) l'attività sottostante entro alla data stabilita, è detto "*prezzo di esercizio*" (*exercise price* o *striking price*); la data indicata nel contratto è detta "*data di estinzione*" (*expiration date*) o "*scadenza*" (*maturity*).

Il prezzo dell'attività sottostante è in relazione con il prezzo di esercizio dell'opzione: tale relazione si esprime attraverso il cosiddetto *valore intrinseco* (*intrinsic value*); per una *call* tale valore è dato, in un certo istante, dalla differenza fra il prezzo dell'attività e il prezzo di esercizio dell'opzione se tale differenza è positiva, altrimenti è definito uguale a zero. Una opzione *call* è detta "*in-the-money*" se ha valore intrinseco positivo, cioè se il prezzo di esercizio è minore del prezzo di mercato dell'attività sottostante; è detta, invece "*out-of-the-money*" se ha valore intrinseco nullo, cioè nel caso in cui il prezzo di esercizio sia maggiore del prezzo dell'attività in quel momento. Definizioni analoghe valgono per le opzioni *put*.

Si è parlato di "scadenza" come data "entro" la quale è possibile esercitare l'opzione; in effetti questa caratteristica è propria di un particolare tipo di opzioni, dette "*opzioni Americane*": per queste opzioni è prevista la possibilità di esercizio anticipato (*early exercise*) in qualsiasi data precedente quella di maturità. Le opzioni che possono essere esercitate esclusivamente alla scadenza sono dette, invece, "*opzioni Europee*".

Nei contratti di opzione il compratore viene ad assumere una "posizione lunga" sull'opzione; il venditore, denotato anche come colui che "scrive l'opzione" (*writer*), ha, invece, una "posizione corta" sull'opzione. Nei contratti di opzione, pertanto, sono possibili quattro posizioni di base:

1. Posizione lunga su una *call* (propria di chi compra una *call*)
2. Posizione lunga su una *put* (propria di chi compra una *put*)

3. Posizione corta su una *call* (propria di chi vende la *call*)
4. Posizione corta su una *put* (propria di chi vende la *put*).

Ognuna di queste posizioni è caratterizzata da una diversa funzione saldo (*payoff*) che esprime il valore dell'opzione alla data di scadenza. Detto X il prezzo di esercizio dell'opzione e S_T il prezzo dell'attività sottostante alla scadenza, il saldo di una posizione lunga su una *call* europea, se non si tiene conto del costo iniziale dell'opzione, è dato da:

$$\max(S_T - X, 0). \tag{1}$$

Infatti la *call* verrà esercitata solo se $S_T > X$ e in questo caso il suo valore sarà dato proprio dalla differenza $S_T - X$, mentre in caso contrario essa scadrà priva di valore. E' chiaro, così, che il *payoff* del detentore di una posizione corta nella medesima *call*, speculare rispetto alla precedente, sarà dato da:

$$-\max(S_T - X, 0). \tag{2}$$

Espressioni analoghe valgono per le *put*; precisamente il valore finale di una posizione lunga su una *put* Europea avente ancora i parametri suddetti è dato da:

$$\max(X - S_T, 0), \tag{3}$$

mentre quello della posizione corta nella stessa opzione è:

(4) $$-\max(X - S_T, 0).$$

Problema: Quale è il giusto prezzo che un compratore deve pagare per assumere una posizione lunga su una *call* europea al tempo $t < T$ data di scadenza della *call*?

La risposta dipende da t, T, il prezzo di esercizio X, il prezzo corrente del bene sottostante S e dalle prospettive del mercato.
Per dare significato matematico al problema posto è necessario formulare un modello matematico.

2. *Il modello matematico*

Ipotesi sull'andamento del prezzo del bene sottostante l'opzione (ad esempio l'azione Fiat) $S(t)$:

(5) $$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dW \,,$$

μ = deriva o drift,

σ = volatilità > 0,

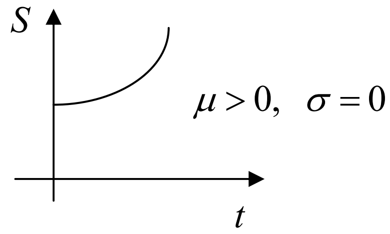
$W(t)$ = processo di Wiener.

Poniamo $\sigma = 0$, si ha:

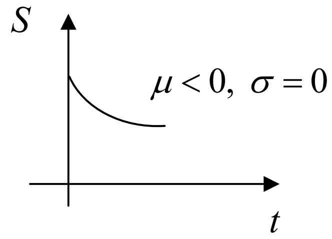
(6) $$\frac{dS}{dt} = \mu\; S \,,$$

da cui

(7) $$S(t) = S_0\; e^{\mu\, t} \,.$$

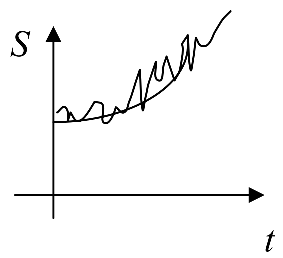


Trend al rialzo



Trend al ribasso

$\mu > 0, \quad \sigma > 0$



Modelli analoghi a quello usato per il prezzo dei beni sottostanti le opzioni sono stati a lungo utilizzati in matematica, ad esempio:

1) Il moto browniano;
2) Meccanica statistica;
3) Analisi matematica e probabilità (equazioni differenziali stocastiche alla Ito).

La modellizzazione di Black e Scholes consiste anche di alcune ipotesi circa le modalità di funzionamento dei mercati e precisamente:

· il tasso di interesse privo di rischio r e la volatilità σ sono noti e costanti nel tempo,

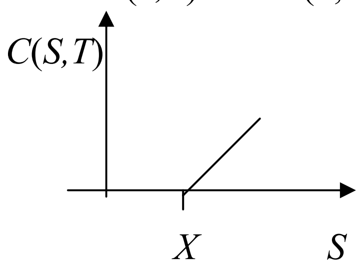
- il bene sottostante l'opzione non paga "dividendi",
- il mercato dei titoli è operativo a tempo continuo,
- non ci sono penalità per la vendita allo scoperto,
- è possibile prendere in prestito qualsiasi frazione di un titolo,
- non ci sono possibilità di arbitraggio.

Tali ipotesi determinano condizioni di mercato particolari, tanto che, quando ci si riferisce a mercati sottostanti a tali ipotesi si parla di "*Black-Scholes world*".

3. *La risoluzione quantitativa del modello*

Consideriamo una opzione europea di tipo *call*, che matura al tempo T con prezzo di esercizio X. Indichiamo con $C(S,T)$ il suo valore alla scadenza del contratto $(t = T)$.

$$C(S,T) = \max(0,S-X)$$



$C(S,t) \qquad t < T\,?$

La tecnica per risolvere il problema si chiama “Hedging” (immunizzazione).

Consiste nel costruire due posizioni equivalenti (portafogli equivalenti).

Equivalente = eguale profilo di rischio

Portafoglio 1 ~ Portafoglio 2

In base alla ipotesi di assenza di arbitraggi se il valore del Portafoglio 1 è eguale al valore del Portafoglio 2 all’istante T allora essi sono uguali per ogni t.

Portafoglio 1 = 1 opzione *call* europea.

Portafoglio 2 = $\Delta(t)$ unità del bene sottostante (l’azione Fiat) e $M(t)$ unità di un investimento privo di rischio (BOT).

Il valore di una unità di investimento privo di rischio $B(t)$ varia secondo la legge

(8) $dB = rBdt$,

r = tasso di interesse privo di rischio.
Sia
$\Pi(t)$ = valore portafoglio 2.

(9) $\Pi(t) = \Delta(t)S(t) + M(t)B(t)$,

da cui

(10) $d\Pi = d\Delta \cdot S + \Delta \cdot dS + dM \cdot B + M \cdot dB$,

Assumiamo che il portafoglio 2 sia "autofinanziante" cioè che:

(11) $d\Delta \cdot S + dM \cdot B = 0$,

da cui

(12) $d\Pi = \Delta \cdot dS + M \cdot dB$,

(13) $d\Pi = \Delta \cdot \mu \cdot Sdt + \Delta \cdot \sigma \cdot S \cdot dW + M \cdot dB$,

(14) $\quad d\Pi = (\Delta \cdot \mu \cdot S + M \cdot B)dt + \Delta \cdot \sigma \cdot SdW$,

Valore portafoglio 1 = $C(S,t)$

(15) $\quad dC(S,t) = \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS)^2$,

(Lemma di Ito)

$$dC = dt\left(\frac{\partial C}{\partial S} \mu \ S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right)$$

(16)

$$+ dW\left(\frac{\partial C}{\partial S} \sigma \ S \right),$$

Hedging:

(17) $\quad d\Pi = dC$,

(18) $\quad \Pi = C, \qquad t = T$,

da ciò segue:

(19) $\quad \Pi(t) = C(S(t),t), \quad \forall t$,

cioè:

(29) $M \cdot B = C - \Delta \cdot S$ (*)

La condizione $d\Pi = dC$

Impone:

1) Eguaglianza coefficiente dW

(21) $\Delta = \dfrac{\partial C}{\partial S}$

(Hedging stategy)

2) Eguaglianza coefficiente dt

(usando *)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0\,, \quad S > 0 \quad \mathrm{t} < \mathrm{T}\,,$$

La equazione:

(22) $$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0\,, \quad S > 0, \quad \mathrm{t} < \mathrm{T}\,,$$

Con la condizione finale:

(23) $\quad C(S,T) = \max(0, S - X), \quad S > 0$

Determina $C(S,t)$ per $S > 0, t < T$.

Osservazione: non serve condizione al contorno in $S = 0$.
Black Scholes hanno trovato una formula risolutiva per il problema (22), (23) nota come formula di Black Scholes.

Problema delle opzioni con barriera e parametri dipendenti dal tempo

1) *Il problema applicativo*

Il problema che affronteremo è una generalizzazione del problema precedentemente esposto.

Il modello di Black Scholes verrà generalizzato introducendo:

1.1. *Parametri dipendenti dal tempo*

$$\sigma = \sigma(t), \qquad t < T,$$

$$q = q(t), \qquad t < T,$$

$$r = r(t), \qquad t < T,$$

di σ e r si è già illustrato il significato, q è un parametro che tiene conto del fatto che il bene sottostante l'opzione paga un dividendo al suo possessore (modello continuo dei dividendi: nell'intervallo di tempo dt il dividendo pagato è $qSdt$).

1.2. *Barriera*

Numerose sono le opzioni con barriera trattate sui mercati finanziari, noi ci limiteremo a trattare la più semplice tra di esse cioè la opzione up-and-out call. Questa opzione ha come funzione di payoff la usuale $\max(S - X, 0)$ alla scadenza T a meno che nel periodo $t < T$ il prezzo del bene sottostante la opzione abbia superato un prezzo prefissato H (detto barriera) nel qual caso la opzione è priva di valore.

2) *Il modello matematico*

Il modello di Black Scholes opportunamente generalizzato dà per il prezzo $V(S,t)$ di una opzione up-and-out call di tipo europeo con parametri dipendenti dal tempo il seguente problema:

$$(24)\quad \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \alpha(t)S\frac{\partial V}{\partial S} + r(t)V,\, 0 < S < H, t < T,$$

$$(25)\quad V(H,t) = 0,\ t < T,$$

$$(26)\quad V(S,T) = \max(S - X, 0),\, 0 < S < H,$$

dove $\alpha(t) = r(t) - q(t),\ t < T$.

3) ***La risoluzione quantitativa del modello***

Il problema che si desidera risolvere è il seguente: trovare una formula analoga alla formula di Black Scholes per la soluzione del problema dato da (24), (25), (26).

Questo problema anche se elementare ha una certa rilevanza nella pratica quotidiana dei mercati finanziari ed è stato suggerito da Fabio Mercurio di Banca IMI a Milano.

Il lavoro è stato fatto in collaborazione con Lorella Fatone della Università di Modena.

La risoluzione del problema (24), (25), (26) verrà ricondotta alla risoluzione del problema di Black Scholes (22), (23).

Richiamiamo alcuni fatti ben noti sulle equazioni differenziali lineari (caso scalare):

(27) $$\frac{dz}{dt} = a \;\; z \,,$$

(28) $$z(T) = z_0 \,,$$

la cui soluzione è

(29) $$z(T) = e^{a(t-T)} z_0 \,,$$

e la equazione:

(30) $$\frac{dz}{dt} = a(t) \;\; z \,,$$

(31) $$z(T) = z_0 \,,$$

la cui soluzione è:

(32) $$z(t) = e^{\int_{\mathrm{T}}^{t} a(\tau) d\tau} z_0$$

Consideriamo sistemi di equazioni differenziali ordinarie, cioè equazioni del tipo:

(33) $$\frac{d\underline{z}}{dt} = A\underline{z},$$

(34) $$\underline{z}(T) = \underline{z}_0,$$

dove $\underline{z}(t),\ \underline{z}_0 \in \mathbf{R}^n$ e A è una matrice $n \times n$ la cui soluzione è:

(35) $$\underline{z}(t) = e^{A(t-T)}\underline{z}_0,$$

e

(36) $$e^{A(t-T)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t-T)^k}{k!},$$

ed equazioni del tipo:

(37) $$\frac{d\underline{z}}{dt} = A(t)\underline{z},$$

(38) $$\underline{z}(T) = \underline{z}_0,$$

la cui soluzione in generale non è:

(39) $$\underline{z}(t) = e^{\int_T^t A(\tau)d\tau}\underline{z}_0,$$

Infatti nel caso delle matrici non sempre vale la proprietà commutativa del prodotto, in generale si ha:

(40) $$[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1 \neq 0,$$

da cui segue che in generale risulta:

(41) $$e^{A_1} e^{A_2} \neq e^{A_1 + A_2}.$$

Condizione sufficiente affinché

(42) $$\underline{z}(t) = e^{\int_{T}^{t} A(\tau) d\tau} \underline{z}_0,$$

sia la soluzione di (37), (38) è che risulti:

(43) $$[A(t_1), A(t_2)] = A(t_1)A(t_2) - A(t_2)A(t_1) = 0, \quad \forall t_1, t_2.$$

In questo caso il sistema di equazioni differenziali si comporta come una equazione scalare.

Il modello di Black Scholes può essere interpretato come una equazione del tipo:

(44) $$\frac{d\underline{z}}{dt} = A\underline{z},$$

(45) $$\underline{z}(T) = \underline{z}_0 ,$$

abbiamo cioè:

(46) $$\frac{\partial C}{\partial \mathrm{t}} = LC ,$$

(47) $$C(S,T) = C_0(S) = \max(0, S - X),$$

dove $C(S,t)$ è pensato come vettore in uno spazio di funzioni che prende il luogo di $\mathbf{R}^n$ e in luogo della matrice A occorre considerare l'operatore differenziale lineare:

(48) $$L = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} - rS\frac{\partial}{\partial S} + r .$$

La soluzione di (46), (47) è data da:

(49) $$C(S,t) = e^{(t-T)L} C_0 .$$

Osservazioni:

1. Nel caso degli operatori differenziali lineari in generale non è vero che

$$e^{(t-T)L} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k (t-T)^k}{k!},$$

Nel caso del problema di Black Scholes questa formula non è vera,

2. La formula (49) è un modo "astratto" di scrivere la formula di Black Scholes che risolve il problema (22), (23),
3. Usando il metodo della soluzione fondamentale la (49) può essere riscritta come:

$$C(S,t) = \int_0^{\infty} dS' \, W(S,t,S',T) C_0(S'),$$

dove l'operatore

$$e^{(t-T)L},$$

è rappresentato (nella base "delle x") dal nucleo integrale:

$$W(S,t,S',T),$$

detto anche "soluzione fondamentale". L'integrale in dS' sostituisce il prodotto righe per colonne delle analoghe formule in cui compaiono matrici.

Analogamente con quanto detto sopra il modello relativo alle opzioni con barriera e parametri dipendenti dal tempo può essere interpretato come una equazione del tipo:

(50) $$\frac{d\underline{z}}{dt} = A(t)\underline{z},$$

(51) $$\underline{z}(T) = \underline{z}_0,$$

Abbiamo cioè:

(52) $$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{t}} = L(t)\ V,$$

(53) $$V(S,T) = V_0(S) = max(S - X, 0), \quad 0 < S < H,$$

dove

(54) $$L(t) = -\frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2}{\partial S^2} - \alpha(t)S\frac{\partial}{\partial S} + r(t),$$

con la condizione $V(H,t) = 0,\ t < T$.

Osservazione: Per gli operatori differenziali come $L(t)$ è necessario specificare il dominio. La condizione $V(H,t) = 0, t < T$ specifica il dominio di $L(t)$.

Consideriamo:

(55) $$L(t) = L_1(t) + L_2(t) + L_3(t),\ t < T,$$

dove

(56) $$L_1(t) = -\frac{1}{2}\sigma^2(t)\hat{L}_1,\quad \mathrm{t} < \mathrm{T}, \qquad \hat{L}_1 = S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2},$$

(57) $$L_2(t) = -\alpha(t)\hat{L}_2,\quad \mathrm{t} < \mathrm{T}, \qquad \hat{L}_2 = S \frac{\partial}{\partial S},$$

(58) $$L_3(t) = r(t)\hat{L}_3,\ \mathrm{t} < \mathrm{T}, \qquad \hat{L}_3 = I.$$

Si ha:

(59) $$[L(t_1), L(t_2)] = L(t_1)L(t_2) - L(t_2)L(t_1) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{3}\left[L_i(t_1), L_j(t_2)\right] = 0,\ \ \forall t_1, t_2 < T.$$

Infatti:

(60) $$[L_1(t_1), L_1(t_2)] = \frac{1}{4}\sigma^2(t_1)\sigma_2(t_2)\left[\hat{L}_1, \hat{L}_1\right] = 0,$$

(61) $$\left[L_1(t_2), L_2(t_2)\right] = -\frac{1}{2}\sigma^2(t_1)\ \alpha(t_2)\ \left[\hat{L}_1, \hat{L}_2\right] = 0,$$

(62) $$\left[\hat{L}_1, \hat{L}_2\right] f = S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} S \frac{\partial f}{\partial S} - S \frac{\partial}{\partial S} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0,$$

$$S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} S \frac{\partial f}{\partial S} = S^2 \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial f}{\partial S} + S \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) = S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} +$$

$$+ S^3 \frac{\partial^3 f}{\partial S^3},$$

$$S \frac{\partial}{\partial S} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 2S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + S^3 \frac{\partial^3 f}{\partial S^3},$$

(63) $$\left[L_1(t_1), L_3(t_2)\right] = -\frac{1}{2}\sigma^2(t_1)\ r(t_2)\ \left[\hat{L}_1, \hat{L}_3\right] = 0,$$

da cui

(64) $$V(S,t) = e^{\int_T^t L(\tau) d\tau} V_0,$$

dove

(65) $$\int_T^t L(\tau') d\tau' = -\frac{1}{2}\sum{}^2(t,T)\ S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} - A(t,T)\ S \frac{\partial}{\partial S} + R(t,T)\ I,$$

(66) $$\sum{}^2(t,T)=\int_T^t \sigma^2(\tau')d\tau',$$

(67) $$A(t,T)=\int_T^t \alpha(\tau')d\tau',$$

(68) $$R(t,T)=\int_T^t r(\tau')d\tau',$$

Per calcolare

(69) $$e^{-\frac{1}{2}\sum{}^2 S^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}-A\,S\frac{\partial}{\partial S}+R},$$

occorre integrare per $0<t'<1$ il problema:

(70) $$\frac{\partial W}{\partial t'}=-\frac{1}{2}\sum{}^2 S^2\frac{\partial^2 W}{\partial S^2}-AS\frac{\partial W}{\partial S}+RW\ ,\ 0<S<H\ ,\ t'>0\,,$$

(71) $$W(t',H)=0\,,\qquad t'>0\,,$$

(72) $$W(0,S)=\delta(S-S_0),\qquad 0<S<H\ ,$$

La soluzione cercata del problema (24), (25), (26) è:

(73) $$V(S,t)=\int_0^H W(S,t'=1,S_0,0,t,T)\cdot\max(S_0-X,0)dS_0\ ,$$

Osservazioni:

(1) *W* dipende anche da *t* e da *T* perché $\sum^2$, *A*, *R* dipendono da *t* e da *T*,

(2) Se si lasciasse cadere la condizione (71) il problema dato da (70), (72) per $S > 0$ è un problema di tipo Black Scholes (22), (23) (assenza di barriera, coefficienti costanti) che può essere risolto con una formula esplicita (una variazione della formula di Black Scholes).

La risoluzione del problema da noi proposto è pertanto ricondotto al problema di imporre la condizione (71) (presenza della barriera). Questa condizione può essere imposta con un metodo elementare noto come metodo della "carica immagine" che per semplicità illustreremo in un caso più semplice della equazione di Black Scholes cioè nel caso della equazione del calore.

Metodo della carica immagine per la equazione del calore:

$$\frac{\partial u}{\partial \widetilde{\tau}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \qquad -\infty < x < +\infty , \qquad \widetilde{\tau} > 0 ,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad -\infty < x < +\infty ,$$

$$u(\widetilde{\tau},x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\widetilde{\tau}}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\widetilde{\tau}}} d\xi , \quad -\infty < x < +\infty , \ \widetilde{\tau} > 0 ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{\tau}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad -\infty < x < x_0, \qquad x_0 > 0\,, \quad \tilde{\tau} > 0\,,$$

$$u(\tilde{\tau}, x_0) = 0\ , \qquad \tilde{\tau} > 0\,,$$

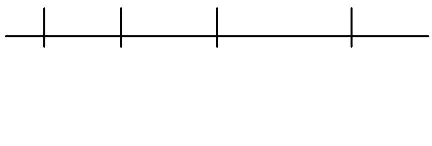
$$u(0,x) = u_0(x), \qquad -\infty < x < x_0\,,$$

$$u(\tilde{\tau},x) = \int_{-\infty}^{x_0} u_0(\xi) G(\tilde{\tau},x,\xi) d\xi$$

$$G(\tilde{\tau},x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\tau}}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\pi\tilde{\tau}}} - e^{\frac{-(x-2x_0+\xi)^2}{4\pi\tilde{\tau}}} \right)$$

notare che

$$G(\tilde{\tau}, x_0, \xi) = 0, \qquad \tilde{\tau} > 0\,, \qquad \xi \le x_0\ ,$$

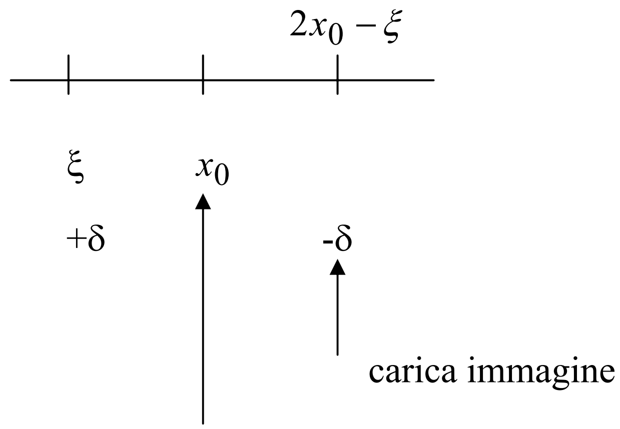


$G(\tilde{\tau},x,\xi)$ soddisfa la equazione del calore

$$\frac{\partial G}{\partial \tilde{\tau}} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad \tilde{\tau} > 0,$$

la condizione iniziale:

$$G(0, x, \xi) = \delta(x - \xi) - \delta(x - 2x_0 + \xi), \qquad -\infty < x < +\infty,$$



ne deriva $G(\tilde{\tau}, x_0) = 0$.

Osservazione

Notare che la equazione di Black-Scholes con coefficienti costanti può ridursi alla equazione del calore.

Analogamente a quanto fatto qui per la opzione up and out call possono essere trattate numerose altre opzioni con barriera e coefficienti dipendenti dal tempo comunemente trattate nei mercati finanziari.